Doubling Conditionの拡張とその応用 (バナッハ空間論の研究とその周辺)

本田, あおい; 岡崎, 悦明; 佐藤, 坦

数理解析研究所講究録
第 1753 巻 2011 年 47-51

Doubling Condition の拡張とその応用

本田あおい (九工大情報工), 岡崎悦明 (九工大情報工),
佐藤坦 (九大名誉教授)

1 はじめに

$1\leq p<+\infty, f(\neq 0)\in L_{p}(\mathbf{R}, dx)$ に対して, 我々は次の数列空間

$$\Lambda_{p}(f):=\left\{\{a_{k}\}\in \mathbf{R}^{\infty}\ \middle|\ \Psi_{p}(\boldsymbol{a};f):=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-a_{k})-f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}$$

を導入し [1], この空間の性質を研究している. 昨年度の RIMS 研究集会 [2] では $\Lambda_{p}(f)$ が線形空間となるための条件について考察した. 特に $p=2$ の場合にフーリエ解析を用いることにより, より精密な条件を与えた. この結果に関して Doubling Condition の概念を導入することにより, さらに改良することができた. 本論文ではこの結果について報告する.

2 Doubling condition の導入

定義 1 $\varphi(x)$ を $[0, +\infty)$ 上の非負関数とする. ある $h\in \mathbb{R}$ が存在して

$$D(h;\varphi):=\limsup_{\substack{x\to+\infty\\ \varphi(x)>0}}\sup_{T\geq 1}\frac{\varphi(Tx)}{\varphi(x)T^{h}}<+\infty,$$

が成り立つとき, φ は doubling condition を満たすと言い,

$$H(\varphi):=\inf\left\{h\in \mathbb{R}\ \middle|\ D(h;\varphi)<+\infty\right\}$$

を φ の *doubling dimension* とよぶ. ただし $\inf\emptyset:=+\infty$.

我々の doubling condition は従来の doubling condition の拡張となっている. 従来の doubling condition の定義は次のとおりである [4]. $\varphi(x)$ を $[0, +\infty)$ 上の非負非減少関数とする.

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{\varphi(2x)}{\varphi(x)}<+\infty$$

が成り立つとき, $\varphi(x)$ は (classical) doubling condition を満たすという.

定理 2 **[5, Lemma 1]** $\varphi(x)$ を $[0,+\infty)$ 上の非負非減少関数とする. このとき $\varphi(x)$ が *doubling condition* を満たすことと $\varphi(x)$ が *classical doubling condition* を満たすことは同値である.

我々の導入した doubling condition では $\varphi(x)$ は非減少と仮定しないため, $H(\varphi)$ が負の場合も有り得る.

例 3 (i) $\varphi(x) := e^{-x}$ のとき $H(\varphi) = -\infty$.
(ii) $\varphi(x) := \log(x+1)$ のとき $H(\varphi) = 0$.
(iii) $\varphi(x) := \dfrac{1+\sin^2 x}{1+x^2}$ のとき $H(\varphi) = -2$.
(iv) $\varphi(x) := \begin{cases} 1, & x \in [k, k+\frac{1}{k^2}), k = 1, 2, \ldots, \\ \frac{1}{x^2}, & otherwise \end{cases}$ のとき $H(\varphi) = +\infty$.

次の Doubling dimension に関する補題は $\Lambda_2(f)$ の例の構成に有用なものである (定理 7 参照).

補題 4 [3, Lemma 3.2] $g(\neq 0) \in L_1$ を非負関数とし, $0 \leq q < +\infty$ に対して,

$$\varphi(x) := \int_0^x \alpha^q g(\alpha) d\alpha, x \geq 0$$

と定義する. このとき, $D(h; g) < +\infty$ を満たす $h > -q-1$ が存在するならば, $H(\varphi) \leq h+q+1$ が成り立つ.

3 主定理

[2] で報告した二つの定理を, doubling condition を用いて改良した定理を報告する. それぞれの主定理の系が [2] で報告した結果である.

まず, $\hat{f}$ を f のフーリエ変換

$$\hat{f}(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

とする.

定理 5 [3, Theorem 4.1] $f(\neq 0) \in L_2$ について, ある $R > 0$ が存在して $|\hat{f}(\alpha)| > 0$, (a.e.), $\alpha \geq R$ かつ $|\hat{f}(\alpha)|$ が doubling condition を満たすとき, $\Lambda_2(f)$ は線形空間である.

系 6 [3, Theorem 4.2] $f(\neq 0) \in L_2$ について, ある $R > 0$ が存在して $|\hat{f}(\alpha)|$ は $\alpha \geq R$ で非増加とする. このとき $\Lambda_2(f)$ は線形空間である.

次に, $f(\neq 0) \in L_2$ について, 次の関数 $\varphi_f(x)$ を定義する:

$$\varphi_f(x) := \int_0^x \alpha^2 \left|\hat{f}(\alpha)\right|^2 d\alpha, \quad x \geq 0.$$

φ_f を用いて, 新たな数列空間 $\Lambda_p^\varphi(f)$ を導入する:

$$\Lambda_2^\varphi(f) := \left\{ \{a_k\} \;\middle|\; \sum_k a_k^2 \left(1 + \varphi_f\left(\frac{1}{|a_k|}\right)\right) < +\infty \right\}.$$

定理 7 [3, Theorem 4.5] $f(\neq 0) \in L_2$ について, $H(\varphi_f) < 2$ のとき, $\Lambda_2(f) = \Lambda_2^\varphi(f)$, かつ $\Lambda_2(f)$ は線形空間である.

$H(\varphi_f) < 2$ を判定する条件として次のようなものがある.

補題 8 [3, Lemma 3.2] $\varphi(x)$ を $[0, +\infty)$ 上の非負絶対連続関数とする. ある $R > 0, h \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \geq R$ に対して

$$x\varphi'(x) \leq h\varphi(x), \text{ a.e.}(dx)$$

が成り立つとき, $H(\varphi) \leq h$ である.

この補題を用いて, 定理 7 の系として次が得られる.

系 9 [2] $f(\neq 0) \in L_2$ について, ある $R > 0, 0 < h < 2$ が存在して, 任意の $x \geq R$ に対して

$$\text{(DC)} \qquad x\varphi_f'(x) \leq h\varphi_f(x)$$

が成り立つとき, $\Lambda_2(f) = \Lambda_2^\varphi(f)$, かつ $\Lambda_2(f)$ は線形空間である.

定理 7 と系 9 では系 9 の条件の方が強く, 系 9 の条件 (DC) は満たさないが, 定理 7 の条件 $H(\varphi_f) < 2$ を満たす例が存在する.

例 10 $f(\neq 0) \in L_2(\mathbb{R}, dx)$, $0 \leq c < 1$,

$$|\hat{f}(\alpha)|^2 = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\alpha \cdot \log\alpha}{\alpha^{2+c}}, & \alpha > 1, \\ 0, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

とする. このとき

$$\begin{aligned} \varphi_f(x) &= \int_1^x \frac{\sin^2\alpha \log\alpha}{\alpha^c} d\alpha \\ &= \frac{(2x - \sin 2x)\log x}{4x^c} - \frac{x^{1-c} - 1}{2(1-c)} - \frac{cx^{1-c}(1 + c(1-c)\log x) - 1}{2(1-c)^2} \\ &\qquad + \frac{1}{4}\int_1^x \frac{\sin 2\alpha(1 - c\log\alpha)}{\alpha^{c+1}} d\alpha, \quad x \geq 1, \end{aligned}$$

したがって,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_f(x)}{x^{1-c}\log x}=\frac{1}{2}$$

であり, 十分大きな x に対して

$$\frac{1}{4}x^{1-c}\log x\le\varphi_f(x)\le x^{1-c}\log x$$

が成り立つ. したがって任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$D(1-c+\varepsilon;\varphi_f)=\limsup_{\substack{x\to+\infty\\ \varphi(x)>0}}\sup_{T\ge1}\frac{\varphi_f(Tx)}{\varphi_f(x)T^{1-c+\varepsilon}}\le\limsup_{\substack{x\to+\infty\\ \varphi(x)>0}}\sup_{T\ge1}4\left(\frac{\log T}{T^{\varepsilon}\log x}+\frac{1}{T^{\varepsilon}}\right)<+\infty$$

が成り立つ. よって $H(\varphi_f)<2$ である. 定理 7 を適用して,

$$\begin{aligned}\Lambda_2(f)=\Lambda_2^{\varphi}(f)&=\left\{\{a_k\}\;\middle|\;\sum_k a_k^2\left(1+\varphi_f\left(\frac{1}{|a_k|}\right)\right)<+\infty\right\}\\&=\left\{\{a_k\}\;\middle|\;\sum_k a_k^2\left(1+\frac{1}{|a_k|^{1-c}}\log^{\#}\frac{1}{|a_k|}\right)<+\infty\right\}\\&=\left\{\{a_k\}\;\middle|\;\sum_k |a_k|^{1+c}\left(1+\log^{\#}\frac{1}{|a_k|}\right)<+\infty\right\},\end{aligned}$$

ただし

$$\log^{\#}x:=\begin{cases}\log x, & x\ge1,\\ 0, & 0\le x<1\end{cases}$$

であり, かつ $\Lambda_2(f)$ は線形である.

他にも, 定理 7 を用いて, 線形空間となる $\Lambda_2(f)$ の色々な例を構成することができる. 次の 2 つの例の構成は系 9 を用いた.

例 11 ある $K>0$ が存在して, $\varphi_f(x)=(1+x)^s-1, x>K, s>0$ となる f について

$$\Lambda_2(f)=\ell_2(\log\ell)^s:=\left\{\{a_k\}\;\middle|\;\sum_k a_k^2\left(1+\log^{\#}\frac{1}{|a_k|}\right)^s<+\infty\right\}.$$

$\ell_2(\log\ell)^s$ は一般化された Zygmund 空間と考えられる [6]. なおこのとき

$$|\hat{f}(\alpha)|^2=s\alpha^{-3}(1+\log\alpha)^{s-1},\ \alpha\ge1$$

である.

例 12 ある $K>0$ が存在して, $\varphi_f(x)=x^s(\log x)^c,\ x>K,\ s>1,\ c>0$ となる f について

$$\Lambda_2(f)=\left\{\{a_k\}\;\middle|\;\sum_k a_k^2\left(1+\left(\log^{\#}\frac{1}{|a_k|}\right)^s\left(\log^{2\#}\frac{1}{|a_k|}\right)^c\right)<+\infty\right\},$$

ただし $\log^{1\#}x:=\log^{\#}x,\ \log^{q\#}x:=\log^{\#}(\log^{(q-1)\#}x),\ q\geq 2.$

例 13 ある $K>0$ が存在して, $\varphi_f(x)=x^s(\log^{q\#}x),\ x>K,\ s>1,\ q\in\mathbf{N}$ となる f について

$$\Lambda_2(f)=\left\{\{a_k\}\;\middle|\;\sum_k a_k^2\left(1+\left(\log^{\#}\frac{1}{|a_k|}\right)^s\left(\log^{(q+1)\#}\frac{1}{|a_k|}\right)\right)<+\infty\right\}.$$

参考文献

[1] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, *An L_p function determines ℓ_p*, Proc. Japan Acad., **84**, Ser. A (2008) 39-41.

[2] 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤坦, L_p 関数が定める数列空間 $\Lambda_p(f)$ の線形性, 京都大学数理解析研究所講究録 (RIMS Kokyuroku)1667, バナッハ空間及び関数空間論における幾何学的構造の研究とその応用, pp89-92 2009 年 11 月.

[3] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, *Doubling condition and linearity of the sequence space $\Lambda_p(f)$*, Kyushu J. Math., *to appear.*

[4] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Applications of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker Inc (2002).

[5] H. Sato, *Global density theorem for a Federer measure*, Tohoku Math. J. 44 (1992), 581-595.

[6] A. Zygmund, *Trigonometric series II*, Cambridge U.P., (Cambridge) 1959.